

Correction

Epreuve Commune Janvier 2012

SESSION 2012



MATHEMATIQUES

SERIE COLLEGE

ATTENTION

LE BARÊME MENTIONNÉ EST SEULEMENT INDICATIF

Activités Numériques	12 points
Activités Géométriques	12 points
Problème	12 points
Qualité de rédaction et présentation	4 points

Exercice n°1 (5 points):

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples (QCM).

Aucune justification n'est demandée.

Pour chacune des questions, trois réponses sont proposées. Une seule est exacte.

Une réponse fautive ou une absence de réponse n'enlève aucun point.

Recopier le numéro de chaque question et la réponse exacte correspondante.

	Questions	A	B	C
Q1	Soit f la fonction telle que : $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$. L'image de -3 par la fonction f est	36	-36	-6
Q2	Les diviseurs communs à 30 et 42 sont :	2; 3; 5; 6 et 7.	1; 2; 3 et 6.	1; 2; 3; 5 et 7
Q3	Le PGCD des nombres 52 et 26 est égal à	26	52	13
Q4	L'écriture scientifique de 0.000049 est	$4,9 \times 10^5$	$4,9 \times 10^{-5}$	49×10^{-6}
Q5	Le développement de $(2x - 3)^2$ donne	$(2x)^2 - 3^2$	$4x^2 - 12x + 9$	$4x^2 - 12x - 9$

Exercice n°2 (3 points):

L'objectif de l'exercice est de trouver, à l'aide du tableau de valeur ci-dessous, la solution à l'équation suivante :

$$x^2 + x - 2 = 4$$

Ci-dessous, nous avons le tableau de valeurs de la fonction f , telle que $f(x) = x^2 + x - 2$.

x	-5	-4,5	-4	-3,5	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	18	13,75	10	6,75	4	1,75	0	-1,25	-2	-2,25	-2	-1,25	0	1,75	4	6,75	10	13,75	18	22,75	28

1. Margot pense que 2 est une solution à l'équation. A-t-elle raison ? Justifie ta réponse.

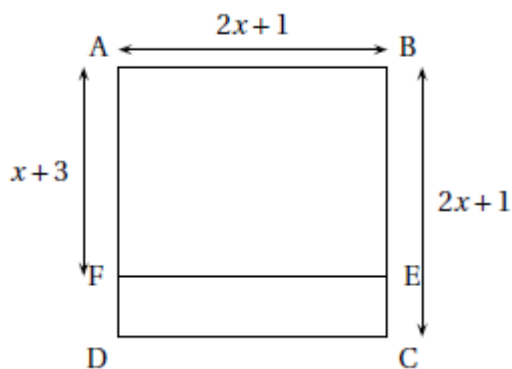
Oui, Margot a raison. Puisque dans le tableau $f(2)=4$ (1 point)

2. Kurtwood, quant à lui, pense que 18 est une solution. A-t-il raison ? Justifie ta réponse.

Le tableau ne nous permet pas de dire si 18 est solution. Kurtwood semble confondre antécédent et image car $f(4)=18$ mais $f(18)= ?$ (1 point)

3. Peut-on trouver une autre solution grâce à ce tableau ? Justifie ta réponse.

En effet, on voit dans le tableau que $f(-3)=4$, donc -3 est une autre solution. (1 point)

Exercice n°3 (4 points):

Sur la figure dessinée ci-contre, ABCD est un carré et ABEF est un rectangle.

On a $AB = BC = 2x + 1$ et $AF = x + 3$ où x désigne un nombre supérieur à deux. L'unité de longueur est le centimètre.

Partie A : Étude d'un cas particulier $x = 3$.

1. Pour $x = 3$, calculer les longueurs AB et AF. $AB=7\text{cm}$ et $AF=6\text{cm}$ (1 point, 0.5 par longueur)
2. Pour $x = 3$, calculer l'aire du rectangle ABEF. $\text{Aire ABEF}=42\text{cm}^2$ (0.5 points)

Partie B : Étude du cas général : x désigne un nombre supérieur à deux.

1. Exprimer en fonction de x , les aires du carré ABCD et du rectangle ABEF.

Aire du carré ABCD= $(2x + 1) \times (2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$ le développement n'était pas demandé. (Toute expression 1 point)

Aire du rectangle ABEF= $(2x + 1) \times (x + 3) = 2x^2 + 7x + 3$ le développement n'était pas demandé. (Toute expression 1 point)

2. En vous aidant de la question 1., montrer que l'aire du rectangle FEDC est égale à $(2x + 1)(x - 2)$

Aire du rectangle FDEC=Aire de ABDC - Aire de ABEF (0.5 points)

Aire de ABEF= $(2x + 1) \times (x + 3)$

Aire de ABCD= $(2x + 1) \times (2x + 1)$

Aire du rectangle FDEC= $(2x + 1) \times (2x + 1) - (2x + 1) \times (x + 3)$ On constate que $(2x + 1)$ est un facteur commun et en appliquant la formule

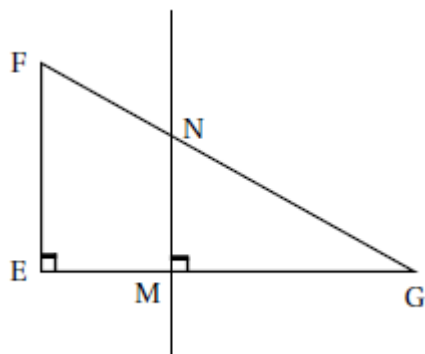
$$k \times a - k \times b = k \times (a - b)$$

Où $k = (2x + 1)$, $a = (2x + 1)$, et $b = (x + 3)$

En factorisant, on obtient que l'aire e FEDC est égal à (0.5 points, pour le membre de gauche) $(2x + 1)(2x + 1 - x - 3) = (2x + 1)(x - 2)$ (0.5 points résultat final) Toute proposition devant être valorisée à ce stade.

Exercice n°1 (5 points):

EFG est un triangle rectangle en E tel que EF=5 cm et FG=13 cm.
La figure donnée n'est pas réalisée à l'échelle.



1. Montrer, en justifiant, que EG=12 cm. (1.5 points)
EFG étant rectangle en E(0.5 points), on peut utiliser le Théorème de Pythagore (0.5 points) qui dit que :
« **Pour tous** les triangles rectangle et **seulement pour eux**, on a que le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés. »
alors, on a $FG^2=EF^2+EG^2$ (0.5 points)
 $EG^2=FG^2-EF^2=169-25=144$
 $EG=12$ cm
2. On considère le point M sur [EG] tel que EM = 3 cm.
Calculer GM.
 $GM = EG - EM = 12 - 3 = 9$ cm (1 point)
3. La perpendiculaire à (EG) passant par M coupe [FG] en N. Les droites (MN) et (EF) sont-elles parallèles ? Justifier. (1 point)
On sait que $(EF) \perp (EG)$ et $(MN) \perp (EG)$ (0.5 points)
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles. (0.5 points)
Donc $(EF) \parallel (MN)$
4. A l'aide du théorème de Thalès, calculer GN. (1.5 points)

GNM et GEF sont 2 triangles ayant un sommet commun G et dont les côtés opposés à ce sommet sont parallèles $(EF) \parallel (MN)$. (0.5 points)

Par le Théorème de Thalès, leur côté sont proportionnels donc le tableau suivant est un tableau de proportionnalité :

GN	GM	MN
GF	GE	FE

(0.5 points)

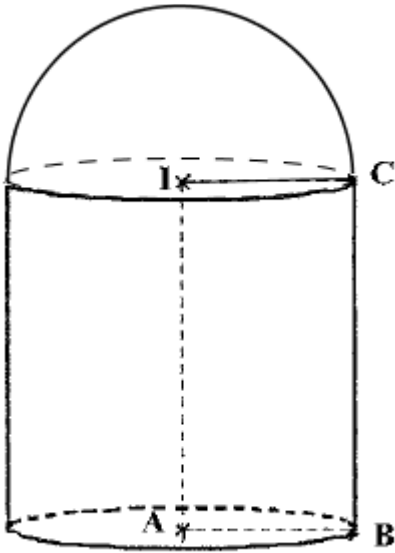
Donc en remplaçant par les valeurs, on a :

GN	9
13	12

Par le produit en croix, on obtient : que

$$GN = \frac{9 \times 13}{12} = \frac{39}{4} = 9.75 \text{ cm (0.5 points)}$$

Exercice n°2 (5 points) :



Pour empêcher les automobilistes de garer leur voiture sur les trottoirs, certaines villes ont décidé de poser des bornes métalliques qui ont la forme d'un cylindre surmonté d'une demi-sphère. On a $IC=25$ cm et $AI=60$ cm. Sachant que :

Le volume d'un cylindre est égal à hauteur \times aire de la base

Le volume d'une sphère est $\frac{4}{3}\pi r^3$ où r est le rayon de la sphère.

Dans cet exercice, les valeurs exactes ne sont pas exigées.

1. Sachant que $1 \text{ dm}^3=1$ litre, donner en litre, le volume d'une borne métallique. (2 points)

Volume de la borne=volume du cylindre+Volume de la demi-sphère. (0.25 points)

Volume du Cylindre= $25^2 \times 60 \times \pi = 37500 \pi \approx 117810 \text{ cm}^3$ (0.5 points)

Volume de la demi-sphère $\left(\frac{4}{3} \times \pi \times 25^3\right) \div 2 = \frac{31250 \pi}{3} \approx 32725 \text{ cm}^3$ (0.5 points)

Volume de la borne= $117810 + 32725 = 150535 \text{ cm}^3$ (0.5 points)

Or, $150535 \text{ cm}^3 = 150,535$ litres (0.25 points)

2. Il existe une version plus grande de ces bornes. Toutes les longueurs sont multipliées par 2. Quel est alors le volume en litres de cette seconde sorte de bornes ? (1 point)

On sait que si des longueurs d'un solide sont multipliées par un coefficient k alors son volume est multiplié par k^3 (0.5 points). Ici $k=2$, donc le volume de la grande borne est égal à $2^3 \times$ volume de la petite borne = $8 \times 150.535 = 1204.28$ litres (0.5 points)

3. On sait que l'aire d'une sphère se calcule à partir de la formule suivante : **aire sphère= $4\pi r^2$** . Calculer l'aire totale en cm^2 de la borne métallique.(2 points)

Aire de la borne=(Aire du cylindre-aire d'une de ses bases)+Aire de la demi-sphère. (0.5 points)

Aire du Cylindre= $2 \times 25 \times \pi \times 60 + 25^2 \times \pi = 3625 \pi \approx 11388 \text{ cm}^2$ (0.5 points)

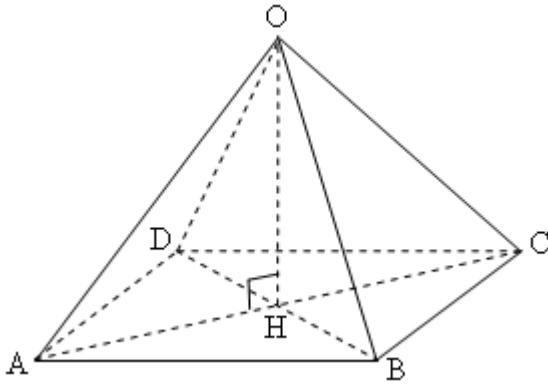
Aire de la demi-sphère

$(4 \times \pi \times 25^2) \div 2 = 1250 \pi \approx 3927 \text{ cm}^2$ (0.5 points)

Aire de la borne=

$11388 + 3927 = 15315 \text{ cm}^2$ (0.5 points)

Exercice n°3 (2 points):



On considère la pyramide régulière OABCD. La base ABCD est un carré, H est le point d'intersection des diagonales [BD] et [AC].

On sait que **la hauteur [OH] mesure 6 cm.**

Le volume d'une pyramide est égal à :

$$\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$$

Sachant que le volume de la pyramide est égal à 50 cm^3 , quelle est la longueur du côté du carré ABCD ?

On a $\frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3} = 50$ (0.5 points)

Or, la hauteur est égale à 6 cm donc

$$\frac{\text{aire de la base} \times 6}{3} = \text{aire de la base} \times 2 = 50$$
 (0.5 points)

Par conséquent aire de la base est égale à 25 cm^2 (0.5 points), donc la longueur du côté du carré est 5 cm (0.5 points).

PROBLÈME

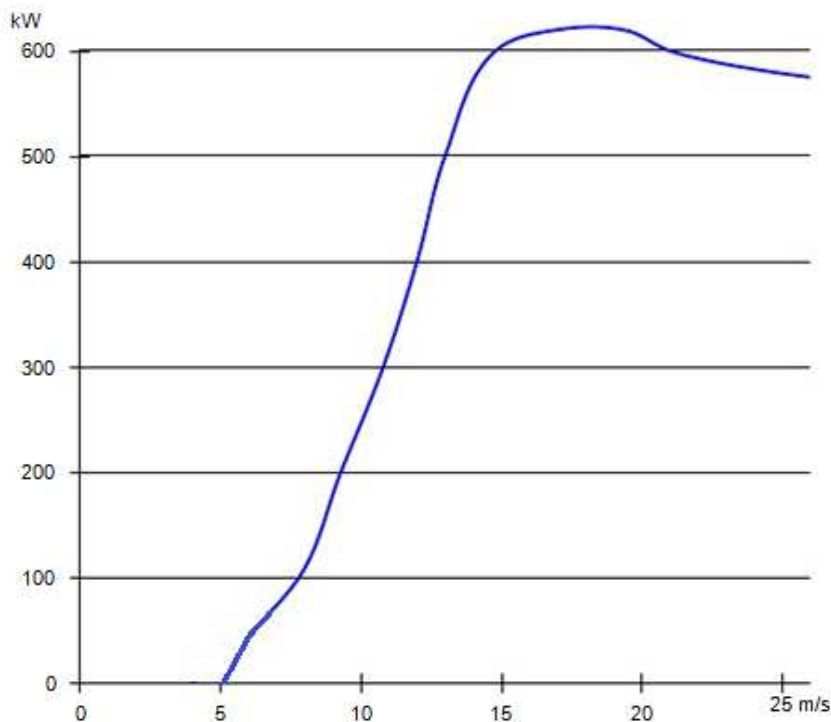
12 points

Une commune étudie l'implantation d'une éolienne dans le but de produire de l'électricité.

Partie 1 : Courbe de puissance d'une éolienne

Utiliser ce graphique pour répondre aux questions suivantes :

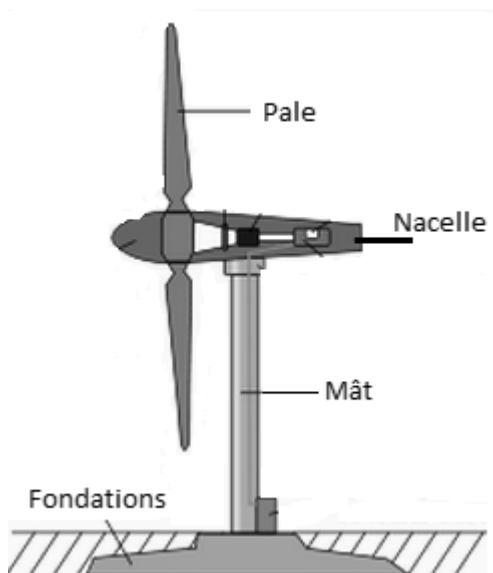
1. Quelle vitesse le vent doit-il atteindre pour que l'éolienne fonctionne ? **5 m/s (1 point)**
2. La puissance fournie par l'éolienne est-elle plus importante quand le vent a une vitesse de 15 m/s ou quand il a une vitesse de 25 m/s ? Justifiez votre réponse. **On voit qu'à partir de 20 m/s la puissance générée par le vent diminue. On voit nettement qu'à 25 m/s, la puissance générée est au-dessous des 600 kW alors qu'à 15 m/s, la puissance est légèrement supérieure à 600 kW. (1.5 point)**
3. Indiquer 2 vitesses du vent pour lesquelles la puissance de l'éolienne dépasse 200 kW. **Par exemple 10 m/s et 15m/s (1 point, 0.5 points par réponse)**
4. Pour quelle vitesse du vent environ, la puissance fournie par l'éolienne est maximale ? **On accepte toute valeur entre 16m/s et 19m/s (1 point)**
5. La puissance fournie par cette éolienne est-elle proportionnelle à la vitesse du vent ? **(1 point). Justifiez votre réponse. Non (0.5 points), car la représentation graphique de la fonction n'est pas une droite (+0.5 points) et/ou elle ne passe pas par l'origine (+0.5 points).**



La puissance fournie par l'éolienne dépend de la vitesse du vent. Lorsque la vitesse du vent est trop faible, l'éolienne ne fonctionne pas. Lorsque la vitesse du vent est trop importante, par sécurité, on arrête volontairement son fonctionnement. Pour le modèle choisi par la commune, on a tracé la courbe représentant la puissance fournie, en **kW**, en fonction de la vitesse du vent en **m/s** (mètres par seconde).

6.

Partie 2 : La fabrication des éoliennes.



Ci-contre, vous avez le schéma d'une éolienne. Afin d'avoir suffisamment de résistance, le mât soutenant la nacelle doit avoir une longueur supérieure de 40% à celle d'une pale. Enfin, la profondeur des fondations au-dessus desquelles reposent une éolienne doit être égale à **10% de la longueur du mât**.

Les valeurs exactes ne sont pas exigées dans cette partie. Vous pouvez donner des valeurs approchées.

1. Montrer que la longueur du mât d'une éolienne dont les pales mesurent 66 m est égale à 92,4 m. (1 point)

Longueur des pales en m	66	100
Longueur supplémentaire du mât en m		40

Par le produit en croix, on obtient : 26.40m. (0.5 points)

Donc le mât doit mesurer au moins $66+26.40=92.40\text{m}$ (0.5 points)

2. Calculer en arrondissant au mètre près, la profondeur des fondations d'une éolienne possédant des pales de 66m? (1 point)

Longueur des fondations en m		10
Longueur du mât en m	92.4	100

Par le produit en croix, on a $\frac{10 \times 92.4}{100} = 9.24$. (0.5 points)

On obtient des fondations d'une profondeur au mètre près de 9 m. (0.5 points)

3. Quel est le pourcentage que représente la profondeur des fondations trouvée au 2., par rapport à la longueur des pales de 66 m ? (1 point)

Plusieurs démarches :

1) La plus directe :

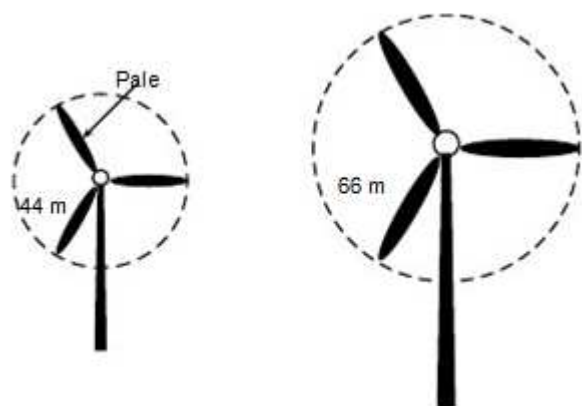
$$1.4 \times 10 = 14$$

Donc les fondations représentent environ 14% de la longueur des pales 1

Longueur des fondations en m	9	
Longueur des pales en m	66	100

2) Par le produit en croix, on a $\frac{9 \times 100}{66} = \frac{150}{11} \approx 13.64$. Donc, les fondations représentent environ 13.64% de la longueur des pales.

Partie 3 : Les pales de l'éolienne :



Les trois pales d'une éolienne décrivent un disque en tournant.
On considère que la longueur des pales est le rayon de ce disque.

Les valeurs exactes ne sont pas exigées dans cette partie. Vous pouvez donner des valeurs approchées.

1. Calculer l'aire de ce disque avec des pales de 44 m. (1 point)

Aire du disque :

$$44^2 \times \pi = 1936 \pi \approx 6082 \text{ m}^2$$

2. Même question avec des pales de 66 m. (1 point)

$$66^2 \times \pi = 4356 \pi \approx 13685 \text{ m}^2$$

3. Avec des pales de 44 m l'éolienne fournit une puissance électrique de 400 kW. Sachant que **la puissance électrique fournie par une éolienne est proportionnelle à l'aire du disque décrit par les pales**, donner la puissance électrique que fournit une éolienne ayant des pales de 66 m. (1,5 points)

Aire décrite par les pales	1936π	4356π
Puissance obtenue en kW	400	

Tableau (1 point)

Par le produit en croix, on a

$$\frac{4356 \times \pi \times 400}{1936 \times \pi} = 900 \text{ kW} \text{ (0.5 points)}$$

Vu autrement :

Le coefficient d'agrandissement des pales est égal à $\frac{66}{44} = 1.5$. (0.5 points)

Donc l'aire décrite par les pales va être multiplier par $1.5^2 = 2.25$ (0.5 points)

Comme la puissance électrique est proportionnelle à cette aire, si l'aire est multipliée par 2.25, la puissance l'est aussi, donc :

$$400 \times 2.25 = 900 \text{ kW} \text{ (0.5 points)}$$